

14/10/15

Δείκτες - Αθροίσματα - Γινόμενα

Ορισμός: Ακολουθία είναι μια συνάρτηση με ωςδο ορισμού κάποιο υποσύνολο των ακέραιων: $f: A \rightarrow B$ με $A \subseteq \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Π.χ. ακολουθιών

α) $f_n = a^n - b^n$, $n \geq 1$ ή $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$A = \mathbb{N}^*$ και $B = \{ \text{μαθηματική παράσταση} \}$

β) $f_n = a^{2n+1} + b^{2n+1}$, $n \geq 0$ $A = \mathbb{N}$

γ) $f_n = 2^{2n} - 1$, $n \geq 0$ $A = \mathbb{N}$, (Η f_n διαίρεται από το 3 $\forall n \in \mathbb{N}$)
 $f_0 = 0$, $f_1 = 3$, $f_2 = 15$, $f_3 = 63$

δ) Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (είναι μια αναδρομική ακολουθία)

ε) $f_n = 1 + 2 + \dots + n$,

στ) $f_n = 1 - 2 + 3 - \dots + (-1)^{n-1} n$

ζ) $f_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n}$

η) $f_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

θ) $f_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!$

ι) $f_n = (1 - 1/2)(1 - 1/3) \cdot \dots \cdot (1 - 1/n)$

Ορισμός: Έστω $m \leq n$ ακέραιοι.

Το σύμβολο $\sum_{i=m}^n a_i$, το οποίο διαβάζεται το άθροισμα από το m μέχρι το n των όρων a_i , είναι το $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$

Αρα $\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$

Τίτλος α) $f_n = \sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n$

β) $f_n = 1-2+3+\dots+(-1)^{n-1}n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}i$

γ) $f_n = 1-1/2+1/4+\dots+(-1)^n(1/2^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i 1/2^i$

δ) $f_n = 1+2^2+\dots+n^2 = \sum_{i=1}^n (i)^2$

Π.χ

1) $\sum_{i=-1}^2 a_i = a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2$

2) $\sum_{i=0}^{10} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 + \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{-1}{4} + \dots + \frac{1}{11}$
 $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{11}$

Αδελφοί στα όρια

$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j+1)^2}$ $i = j+1$

Ορισμός: Έστω $m \leq n$ ακέραιοι. Το σύνολο $\prod_{i=m}^n a_i$ συμποδίζει το γινόμενο $a_i : a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n$

α) $f_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i = n!$

Π.χ

1) $m(m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (n+1) = \prod_{i=m}^{n+1} i = \frac{(n+1)!}{(m-1)!}$, διότι θέλω να έχω και τους άλλους όρους, δηλαδή και τους $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1))$.

2) $\prod_{i=1}^n \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Ιδιότητες: $\sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i = \sum_{i=m}^n (a_i + b_i)$ ομοίως $\sum_{i=m}^n a_i + \sum_{j=m}^n b_j = \sum_{i=m}^n (a_i + b_i)$

► $\prod_{i=m}^n a_i \cdot \prod_{j=m}^n b_j = \prod_{i=m}^n (a_i \cdot b_i)$

► $\prod_{i=m}^n c a_i = c^{n-m+1} \prod_{i=m}^n a_i$

► $c \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^n c a_i$

(επιμεριστική ιδιότητα)

Να αποδείξετε ότι α) $a^n - b^n = (a-b) \left(\sum_{i=1}^n a^{i-1} \cdot b^{i-1} \right)$

β) $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b) \left(\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a^{2k+1-i} b^{i-1} \right) = (a+b) (a^{2k} - a^{2k-1} b + \dots + b^{2k})$

Απόδ.

$(a+b) \left(\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a^{2k+1-i} b^{i-1} \right) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a^{2k+2-i} b^{i-1} + \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a^{2k+1-i} b^i$

$= \underbrace{a^{2k+2}}_{\text{Το } a^{2k+1} + b^{2k+1}} + \sum_{i=2}^{2k+1} (-1)^{i-1} a^{2k+2-i} b^{i-1} + \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} a^{2k+1-i} b^i + \underbrace{b^{2k+1}}_{\text{Το } a^{2k+1} + b^{2k+1}}$

Έχω ότι $\sum_{i=2}^{2k+1} (-1)^{i-1} a^{2k+2-i} b^{i-1} = \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j a^{2k+1-j} b^j$ (η διαφορά τους είναι

$\boxed{i-1=j}$, $2k+2-(j+1) = 2k+1-j$

στο πρώτο Άρ. ο ένας όρος μπορεί να διαγραφεί τον άλλον.)

Επειδή $(-1)^{j-1} (-1) = (-1)^j$, έχουμε: $\sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j-1} a^{2k+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j a^{2k+1-j} b^j = 0$
 $-\sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j-1} a^{2k+1-j} b^j$

Διαιρέσιμτητα

Ορισμός: Ο ακέραιος m διαιρεί τον ακέραιο n αν υπάρχει ακέραιος k ώστε $n = m \cdot k$.

δηλαδή ο m διαιρεί τον $n \Leftrightarrow$ ο n είναι ποτ/ο του m .

$\Leftrightarrow$ ο m είναι διαιρέτης του n .

► Γράφουμε m/n (m διαιρεί n)

Ορισμός: Ένας φυσικός $p > 1$ θα καλείται πρώτος, αν διαφέρει μόνο από το ± 1 και $\pm p$.

► Το 1 δεν είναι πρώτος

π.χ $2, 3, 5, 7, 11, 13$

Ορισμός: Ένας ακέραιος $n \neq \pm 1$ θα καλείται σύνθετος, αν υπάρχουν ακέραιοι m και $l \neq \pm 1$ ώστε $n = m \cdot l$.

► Αν $a | b$ τότε $|a| \leq |b|$

► Αν $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$ τότε $(\Rightarrow) \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$

► Αν $a | b$ και $b | c$ $(\Rightarrow)$ τότε $a | c$. Θέτουμε $c = ka$.

$b = \frac{c}{k} = \frac{ka}{k} = a$. Άρα $c = ka$.

Θεώρημα: Κάθε φυσικός $n > 1$ είναι πρώτος ή σύνθετος.

Απόδ.

Ο n είναι πρώτος, ισχύει.

Έστω ότι ο n δεν είναι πρώτος. Θα υπάρχουν συνδυασμένοι δύο πρώτοι p και p' ώστε $n = pp'k$, $k \geq 1$.

Τώρα ο n είναι σύνθετος.

$n = ab$, $a = c_1 b_1$, $c_1 = d_1 \cdot e_1$ μετά από επεξεργασία βήματα θα βρούμε p πρώτο, ώστε $n = p \cdot h$ και συνεχίζουμε έτσι μέχρι να γίνει ο n γινόμενο πρώτων αριθμών.